CEVAP ANAHTARI

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, GÜZ DÖNEMİ 2015-2016

MAT-210 İLERİ ANALİZ II

ARASINAV - 06 KASIM 2015

İsim:

Numara:

YALNIZCA 5 SORU CEVAPLANDIRINIZ!

NOT: **Sınav süresi 110 dakikadır. Tam puan alabilmek için, cevaplarınızı nedenleriyle birlikte matematiksel olarak ifade etmeniz ve açıklamanız gerekmektedir**

1. Prob	2. Prob	3. Prob	4. Prob	5. Prob	6. Prob	TOTAL

1. $\mathbf{h}(x,y) = \sqrt{x+3}\, e^{y-2}$ fonksiyonu verilsin.

   a. (10 puan) **h** fonksiyonun belirlediği yüzeye, $(1,2,2)$ noktasında teget olan düzlemin denklemini bulunuz.

Teğet düzlem denklemi : $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ ile belirlenir. Öyleyse ilk olarak kısmi türevleri bulalım

$h_x(x,y) = \dfrac{e^{y-2}}{2\sqrt{x+3}} \Rightarrow h_x(1,2) = \dfrac{1}{4}$, $h_y(x,y) = \sqrt{x+3}\, e^{y-2} \Rightarrow h_y(1,2) = 2$

$z = h(1,2) + h_x(1,2)(x-1) + h_y(1,2)(y-2)$

$z = 2 + \dfrac{x-1}{4} + 2(y-2) \Rightarrow \boxed{z = \dfrac{x+8y-9}{4}}$ olarak teğet düzlem denk. bulunur.

   b. (10 puan) $\sqrt{3.99}\, e^{0.02}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplayınız.

$h(x,y) = \sqrt{x+3}\, e^{y-2}$ fonksiyonunu kulanalım.

$x_0 = 1$ ve $x = 0.99$
$y_0 = 2$ ve $y = 2.02$ } o.ü lineerleştirme (teğet düzlem) ile yaklaşım yaparsak

$L(x,y) = \dfrac{x+8y-9}{4}$ olarak bulmuştuk. Yani

$h(x,y) \approx L(x,y) = \dfrac{x+8y-9}{4}$ olur.

$h(0.99, 2.02) \approx L(0.99, 2.02) = \dfrac{0.99 + 16.16 - 9}{4} = \dfrac{8.15}{4} \approx \underline{\underline{2.03}}$

2. (20 puan) $f(x,y,z) = x^2 - yz + z^2x$ fonksiyonu ve $P = (1,-4,3)$ ve $Q = (2,-1,8)$ noktaları veriliyor. Bu fonksiyonun, P noktasında ve $\overrightarrow{PQ}$ vektörü yönündeki yönlü türevini hesaplayınız. P noktasında f fonksiyonun maksimum değişim oranı nedir ve hangi yönde alır?

$\overrightarrow{PQ} = Q-P = (2-1, -1+4, 8-3) = (1,3,5)$ olarak bulunur.

$u = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{3}{\sqrt{35}}, \dfrac{5}{\sqrt{35}}\right)$ 'tir. (Birimleştirdik.)

Gradiyent vektörü ise:

$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (2x+z^2, -z, -y+2xz)$ dir.

$\nabla f|_P = (2+9, -3, 4+6) = (11, -3, 10)$ olur.

Öyleyse P noktasında, $\overrightarrow{PQ}$ yönündeki yönlü türevi

$D_u f(P) = \overrightarrow{\nabla f}|_P \cdot \vec{u}$

$D_u f(P) = (11, -3, 10) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{3}{\sqrt{35}}, \dfrac{5}{\sqrt{35}}\right) = \dfrac{52}{\sqrt{35}}$ //

(*) P noktasında f fonk maksimum değişim oranını $\vec{\nabla f}$ yönünde alır. Buradaki maksimum değişim oranı ise $\vec{\nabla f}$ yönündeki yönlü türev ile bulunur.

$v = \dfrac{\nabla f|_P}{\|\nabla f|_P\|} = \left(\dfrac{11}{\sqrt{230}}, \dfrac{-3}{\sqrt{230}}, \dfrac{10}{\sqrt{230}}\right)$

$D_v f(P) = \overrightarrow{\nabla f}|_P \cdot \vec{v}$

$= (11, -3, 10)\left(\dfrac{11}{\sqrt{230}}, \dfrac{-3}{\sqrt{230}}, \dfrac{10}{\sqrt{230}}\right)$

$= \dfrac{230}{\sqrt{230}} = \sqrt{230}$ //

3. (20 puan) $f(x,y) = e^{-xy}$ fonksiyonun $x^2 + 4y^2 \leq 1$ bölgesi üzerindeki mutlak maks/min değerlerini bulunuz.

Bölgenin içindeki ve sınırlarındaki K.N ları ayrı ayrı incelemeliyiz.

i) $S^\circ = \{(x,y) : x^2+4y^2<1\}$ bölgesini inceleyelim:

Kritik noktaları bulursak;

$\nabla f = 0$ dan

$f_x(x,y) = -ye^{-xy} = 0 \Rightarrow y=0$

$f_y(x,y) = -xe^{-xy} = 0 \Rightarrow x=0$

$(0,0)$ iç bölgedeki tek kritik nokta olarak elde edilir.

ii) $\partial S^\circ = \{(x,y) : x^2+4y^2=1\}$ o.ü bölgenin sınırını inceleyelim:

Bu durumda; elimizde tek yan şart olarak $g(x,y) = x^2+4y^2-1=0$ olup fonksiyonun mutlak maks/min değerlerini bulmak için lagrange çarpım yöntemini kullanırız.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} -ye^{-xy} &= \lambda 2x \quad (1) \\ -x e^{-xy} &= \lambda 8y \quad (2) \\ x^2+4y^2-1 &= 0 \quad (3) \end{aligned}\right.$$

3 bilinmeyenli 3 denklemli sistemi çözmeliyiz.

(1)'de $x=0 \Rightarrow y=0$ elde ederiz. Ancak (3)'ü sağlamaz. O halde $x \neq 0$ dır. Benzer şekilde (2)'de $y=0 \Rightarrow x=0$ elde ederiz ve (3) sağlamadığından $y \neq 0$ dır. Öyleyse

(1) den $e^{-xy} = \dfrac{-\lambda 2x}{y}$ ve (2) den $e^{-xy} = \dfrac{-8\lambda y}{x}$ olup

$$\frac{-\lambda 2x}{y} = \frac{-8\lambda y}{x} \Rightarrow \lambda(x^2-4y^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0} \text{ veya } \boxed{x = \mp 2y}$$

$\lambda = 0$ (olamaz! $x\neq 0, y\neq 0$)

Buradan ise (3)'te yerine yazarsak:

$4y^2+4y^2-1=0 \Rightarrow y = \mp\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ bulunur. Yani

$\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ve $\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)$ o.ü sınırda 4 tane K.N var.

- $f(0,0) = 1$
- $f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{1/4}$ → mutlak maks
- $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-1/4}$ → mutlak min
- $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-1/4}$ → mutlak min.
- $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{1/4}$ → mutlak maks

4. (20 puan) $x \in (-1,1)$ için $f_k(x) = (1-|x|)^k$ ise (f_k) dizisinin limitini bulunuz ve bu yakınsamanın düzgün olup olmadığını belirleyiniz.

- $x=0 \Rightarrow f_k(x) = f_k(0) = 1^k = 1$ olur.

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \text{ dir.}$$

- $x \neq 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} (1-|x|)^k = 0$ dır

$\hookrightarrow$ ($|x| < 1$ old. $1-|x| < 1$ olur)

Öyleyse:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$ bulunur.

Burada $f(x)$ fonksiyonu parçalı tanımlı fonksiyon olup $x=0$ noktasında süreksizdir. Ancak $f_k(x)$ fonksiyon dizisi $\forall x \in (-1,1)$ için süreklidir. Öyleyse bu yakınsamanın düzgün olamaz.

5. (20 puan) $x \in [0, \frac{3}{4}]$ için $f_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$ ise $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{1/2} f_k(x)dx$ limitini bulunuz.

$$f_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^k}{1-x} \quad \text{dir.}$$

$$x \in \left[0, \frac{3}{4}\right] \text{ icin } \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1-x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

$$C_k = \sup_{x\in[0,\frac{3}{4}]} \left| \frac{1-x^k}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{x\in[0,\frac{3}{4}]} \left| \frac{-x^k}{1-x} \right| = 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$\lim\limits_{k\to\infty} C_k = \lim\limits_{k\to\infty} 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k = 0$ olup (f_k) dizisi

düzgün yakınsaktır. Öyleyse

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{1/2} f_k(x)\,dx = \int_0^{1/2} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,dx$$

$$= -\ln|1-x| \Big]_0^{1/2} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

6. (20 puan) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^3} x^{210}$ serisinin $a > 0$ olmak üzere $[-a, a]$ da sürekli bir fonksiyon tanımladığını gösteriniz..

$f_k = \frac{\cos(kx)}{k^3} x^{210}$ o.ü $\forall x \in [-a,a]$ için

$$|f_k| = \left| \frac{\cos(kx)}{k^3} x^{210} \right| \underset{(|\cos(kx)| \le 1)}{\le} \left| \frac{x^{210}}{k^3} \right| \underset{(|x| \le a)}{\le} \frac{a^{210}}{k^3} = M_k \text{ dır.}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{210}}{k^3}$ serisi $p=3>1$ olup p-testinden yakınsaktır.

O halde M-kriterinin şartları sağlanır ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi düzgün yakınsaktır.

(f_k) fonk dizisi $\forall x \in [-a,a]$ için süreklidir. (cos ve polinom fonk olusur. Bu fonk sürekli $\mathbb{R}$'de)

Öyleyse seri düzgün yakınsak olduğundan yakınsadığı fonksiyonda $[-a,a]$ da süreklidir.