CEVAP ANAHTARI

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2015-2016 BAHAR DÖNEMİ
MAT-101 MATEMATİK I - FİNAL SINAVI
04 NİSAN 2016

Adı Soyadı: **Numara:** **İmza:**

1. Prob	2. Prob	3. Prob	4. Prob	5. Prob	6. Prob	TOPLAM

NOT: Sınav süresi 110 dakikadır. Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Başarılar!

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) *(12 puan)* $\lim_{x\to 0^+}(x^{\sin x})$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\ln x^{\sin x}}\right) = e^{\lim_{x\to 0^+}(\sin x . \ln x)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1/x}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}\right)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} . \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{0}\right)}$$

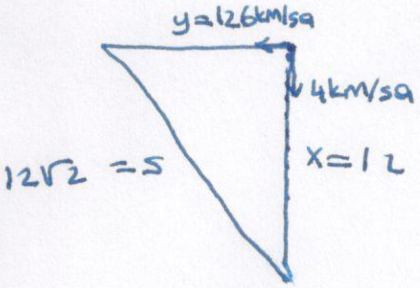
$$= e^0 = \underline{\underline{1}}$$

(b) *(10 puan)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}} t\cos(t^2)dt}{\sin x}$

$$\underset{L.H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sqrt{x}} . \cancel{\cos x}\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}}{\cancel{\cos x}} = \frac{1}{2}$$

ATT'den payın türevi alınır.

2. *(12 puan)* Ali t = 0 anında düz bir yolda 4 km/sa hızla güneye doğru yürümeye başlamıştır. 1 saat sonra, Veli aynı yerden yine düz bir yolda 6 km/sa hızla batıya doğru yürümeye başlamıştır Ali 12 km yol aldığında, Veli ile arasındaki uzaklığın değişme hızı nedir?



Bağlantı : $x^2 + y^2 = s^2$ zamana göre türev alınırsa

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 2s \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$2.12.6 + 2.12.4 = 2.12\sqrt{2} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\boxed{\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 5\sqrt{2}}$$

Ali 12km yol aldığında

t=2 dir!

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = ?$$

3. *(12 puan)* $\sqrt[3]{28}$ sayısının yaklaşık değerini bir fonksiyonun lineer yaklaşımı veya diferansiyel yardımıyla hesaplayınız.

Lineer yaklasım ile :

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ olsun. Öyleyse $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ olup $x_0 = 27$ civarında lineerleştiririz.

$$\boxed{L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$f(x) \approx L(x) = f(27) + f'(27)(x-27)$$

$$f(x) \approx 3 + \frac{(x-27)}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{28} \approx f(28) \approx \frac{82}{27} //$$

Diferansiyel ile :

$\boxed{dy = f'(x_0).dx}$ $x_0 = 27$ ve $dx = 1$ dir.

$$f(28) - f(27) \approx f'(27).1 \Rightarrow f(28) = \sqrt[3]{28} \approx \frac{82}{27} //$$

4. *(10 puan)* Kutupsal denklemi $r = 2\cos\theta + \sin\theta$ olan eğrinin kartezyen denklemini bulunuz ve bu eğriyi kartezyen düzlemde çiziniz.

$\Rightarrow r = 2\cos\theta + \sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta + r\sin\theta$

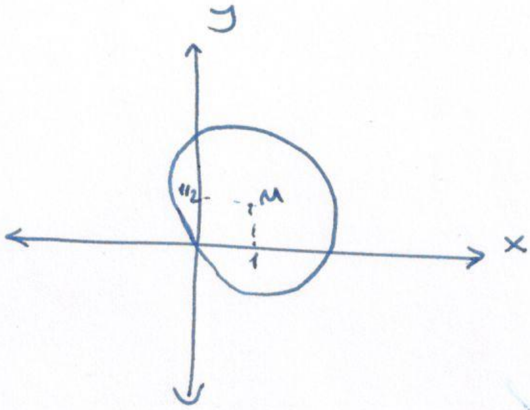
$\Rightarrow x^2+y^2 = 2x+y$

$\Rightarrow x^2-2x+y^2-y=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow M(1,\frac{1}{2})$ ve $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$ olan çember belirtir.



5. *(10 puan)* $F(x) = x - 2\cos x$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ aralığındaki mutlak maximum ve minumum değerlerini bulunuz.

Eğer bir fonksiyon, kapalı bir aralık üzerinde sürekli ise bu fonksiyon maksimum ve minimum değerlerini aralığın uç noktalarında veya fonksiyonun kritik noktalarında alır.

$F(x)$ fonk. $[-\pi,\pi]$'de süreklidir. $F'(x) = 1+2\sin x$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}$ ve $x=\frac{11\pi}{6}$ K.N!

$F(-\pi) = \pi-2$ $\qquad F(-\pi/6) = \frac{-\pi}{6}-\sqrt{3}$

$F(\pi) = \pi+2$ $\qquad F(11\pi/6) = \frac{11\pi}{6}-\sqrt{3}$

$F(-\pi/6) < F(-\pi) < F(11\pi/6) < F(\pi)$

$\Rightarrow$ Sonuç olarak $\begin{cases} F(-\pi/6) = \frac{-\pi}{6}-\sqrt{3} & \text{mutlak min değeri} \\ F(\pi) = 2+\pi & \text{mutlak max değeri} \end{cases}$ olur.

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

(a) *(10 puan)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \sin 2x dx$

$\sin^2 x = u$, $2\sin x \cos x\, dx = du$ > değişken değiştirmesi yapalım. $x=0 \Rightarrow u=0$, $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1$ > olur.

$$\int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \;//$$

(b) *(12 puan)* $\int \frac{x}{(2-x)(x^2+1)}dx$ (Basit kesirlerine ayırma metodu ile çözelim)

$$\frac{x}{(2-x)(x^2+1)} = \frac{A}{2-x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow x = A(x^2+1) + (Bx+C)(2-x)$$

- $x=2$ için $2=5A \Rightarrow \boxed{A=\frac{2}{5}}$
- $x=0$ için $0=A+2C \Rightarrow \boxed{C=-\frac{1}{5}}$

ve

- $x=1$ için $1=2A+B+C$ $\Rightarrow \boxed{B=\frac{2}{5}}$ olarak bulunur.

$$\Rightarrow \int \frac{2dx}{5(2-x)} + \int \frac{2x\,dx}{5(x^2+1)} + \int \frac{-dx}{5(x^2+1)}$$

$$= -\frac{2}{5}\ln|2-x| + \frac{1}{5}\ln|x^2+1| - \frac{1}{5}\arctan x + C$$; C bir sabit

(c) *(12 puan)* $\int_0^e x \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^e x\ln x\, dx$

$\ln x = u$, $x\,dx = dv$, $\frac{dx}{x} = du$, $\frac{x^2}{2} = v$ Kısmi integral ile yapalım.

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{x^2 \ln x}{2}\Big|_t^e - \int_t^e \frac{x\,dx}{2}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^2}{2} - \cancel{\frac{t^2 \ln t}{2}}^{\to 0} - \frac{e^2}{4} + \cancel{\frac{t^2}{4}}^{\to 0}\right)$$

$$\lim_{t\to 0^+}(t^2 \ln t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{t^{-2}} \underset{LH}{\Rightarrow} \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-2/t^3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{e^2}{4}} \;//$$