MAT 553 - MATEMATİKSEL ANALİZ I
GÜZ DÖNEMİ 2020-2021
ÖDEVLER

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

(**Ders Kitabı:** Principle of Mathematical Analysis, W. Rudin, McGraw-Hill, ISBN:0-07-054235-X)

1-ÖDEV (Teslim tarihi: 03 Şubat 2021, Çarşamba)

Prb-1: Sınıf içinde tanımlanan problem:

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in Q\}$$

olarak tanımlanıyor. Bu küme üzerindeki bir sıra ise:

$$(x_1, x_2) < (y_1, y_2) \text{ ya } x_1 < y_1 \text{ yada } x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 < y_2$$

olarak tanımlanıyor. (a) S nin bir sıralı küme olduğunu, (b). S nin EKÜS (lub) özelliğine sahip olup/olmadığını gösteriniz.

Prb-2: Sayfa 22'de 5. problem.

Prb-3: Sınıf içinde tanımlanan problem: $p, q \in J$ ve her iki sayıda asal sayı olmak üzere, $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ toplamının bir rasyonel sayı olmadığını gösteriniz.

Prb-4: Sayfa 23'de 17. problem.

Prb-5: Sayfa 23'de 19. problem.

2-ÖDEV (Teslim tarihi: 17 Şubat 2021, Çarşamba)

Prb-1:

Tanım: Eğer x, katsayıları rasyonel sayı olan bir polinomun kökü ise, $x \in R$ ye '**cebirsel sayı**' denir; yani, $\exists\ n \in J$ ve hepsi aynı anda sıfır olmayan $a_0, a_1, \cdots, a_n \in Q$ mevcut öyleki x aşağıdaki polinomun bir kökü ise:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0,$$

$x \in R$ ye '**cebirsel sayı**' denir. Aksi halde $x \in R$ ye '**transandantal**' adı verilir. Cebirsel sayıların kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Prb-2: $X = \{f : [0,1] \to R$ öyleki f sınırlı bir fonksiyon$\}$ ve $f, g \in X$ için

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

olarak tanımlanıyor. Bu metrik altında X in bir metrik uzay olduğunu gösteriniz.

Prb-3: Sayfa 44'de 10. problem

Prb-4: Aşağıdaki ifade doğru ise ispatlayınız, değilse karşıtına bir örnek veriniz**:**

X bir metrik uzay ve $F \subset Y \subset X$ olsun. Öyleyse:
F, Y uzayında kapalıdır $\Leftrightarrow$ $F = Y \cap H$ olacak şekilde X uzayında bir H kapalı kümesi var ise.

3-ÖDEV (Teslim tarihi: 03 Mart 2021, Çarşamba)

Bir Kümenin Sınırı

Kabul edelimki X bir metrik uzay, $E \subset X$ ve $p \in X$ olsun. Öyleyse aşağıdakilerden yalnız ve yalnız bir tanesi ortaya çıkar:

(i) $\exists r > 0 \ni N_r(p) \subset E$ (Bu durumda $p \in E^o$)

(ii) $\exists r > 0 \ni N_r(p) \subset E^t$ (Bu durumda $p \in (E^t)^o$)

(iii) (i) ve (ii) ortaya çıkmaz. O halde, $\forall r > 0$ için $N_r(p) \cap E \neq \emptyset$ ve $N_r(p) \cap E^t \neq \emptyset$:

Tanım: (iii) koşulunu sağlayan noktaların kümesine E kümesinin sınırı denir ve ∂E ile gösterilir.

Prb-1: $\partial E = \overline{E} - E^o$ olduğunu gösteriniz.

(Örnek: $E = (2, 5] \subset R$ olsun. Öyleyse, $\overline{E} = [2, 5]$ ve $E^o = (2, 5)$ olup $\partial E = \{2, 5\}$ dir)

Prb-2: Aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız

(a) Eğer X bir metrik uzay, $E \subset X$ ve E sınırlı ise, $\overline{E}$ de sınırlıdır.

(b) Eğer $E \subset R^k$ vede E sınırlı ise, $\overline{E}$ kompakt bir kümedir.

Prb-3: Sayfa 44'de 12. problem..

Prb-4: Aşağıdaki ifadeler doğru ise ispatlayınız, değilse karşıtına bir örnek veriniz**:**

a) Kompakt kümelerin bir sonlu birleşimide kompakttır.
b) Kompakt kümelerin bir sonlu kesişimide kompakttır.
c) Kompakt kümelerin herhangi bir birleşimide kompakttır.
d) Kompakt kümelerin herhangi bir kesişimide kompakttır.

4-ÖDEV (**Teslim tarihi: 19 Mart 2021, Cuma**)

Prb-1: X bir metrik uzay ve bu uzayda $p_n \to a$ olsun. $K = \{a, p_1, p_2, \cdots\}$ kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

Prb-2: $\mathbb{C}$ de $s_n \to s$ ve $\sigma_n = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}$ $(n \in J)$ olsun. $\sigma_n \to s$ mıdır? Doğru ise ispat ediniz, değilse karşıtına örnek veriniz.

Prb-3: $l^\infty = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \ni x_1 \in R$ ve $\sup\{|x_1|, |x_2|, \cdots\}$ mevcut$\}$ sınırlı dizilerin uzayı olmak üzere

(a) $d(x,y) = \sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \cdots\}$ metriğine göre l^∞ uzayının bir metrik uzay olduğunu gösteriniz.

(b) $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^\infty$ ve $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \cdots) \in l^\infty$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadığını gösteriniz:

$$l^\infty \text{ da } x_n \to x \Rightarrow R \text{ de her } j \text{ için } x_{jn} \to x_j \text{ dır}$$

$$R \text{ de her } j \text{ için } x_{jn} \to x_j \to l^\infty \text{ da } x_n \to x \text{ dır.}$$

Prb-4: X bir metrik uzay ve $\{p_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $D = \{p_1, p_2, \cdots\}$ ve F ise bu dizinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. $D' \subset F$ olduğunu gösteriniz. $F \subset D'$ midir, neden?

5-ÖDEV (**Teslim tarihi: 09 Nisan 2021, Cuma**)

Prb-1: Sayfa 79'de 8. problem

Prb-2: Sayfa 79'de 23. problem

Prb-3: X bir metrik uzay ve $p \in X$ olmak üzere $f : X \to R$ fonksiyonu p noktasında sürekli ve $f(p) > 0$ olsun. Öyleyse, $\exists r > 0 \ni \forall q \in N_r(p)$ için $f(q) \geq r$ olduğunu gösteriniz

Prb-4: $f : (0,1) \to R$ düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Gösteriniz ki $\exists!$ sürekli bir $g : [0,1] \to R$ öyleki $\forall x \in (0,1)$ için $g(x) = f(x)$ dir.

Prb-5: X bir metrik uzay ve $K \subset X$ kompakt bir küme olmak üzere $f : X \to R$

$$f(p) = \inf\{d(p,q) : q \in K\} = dist(p,K)$$

olarak tanımlanıyor. f fonksiyonunun X de sürekli olduğunu gösteriniz.

ÇALIŞMA PROBLEMLERİ

Prb-1: Sayfa 99'de 10. problem

Prb-2: Sayfa 100'de 14. problem

Prb-3: X ve Y metrik uzaylar, $A \subset Y \subset X$ olsun. Eğer A kümesi X de bağlantılı değil ise, Y de de bağlantılı değildir. İfade doğru ise ispat ediniz, değilse karşıtına bir örnek veriniz.

Prb-4: X, 2x2-boyutundaki tüm matrislerin kümesi; A ise 2x2-boyutundaki matrislerden çakışık özdeğerlere sahip olanların kümesi olsun. A nın kapalı olduğunu gösteriniz.