6. $f(x) = \ln(x^2+1)$ fonksiyonu veriliyor:

(a) **(5 puan)** f fonksiyonunun tanım kümesini, eksenleri kestiği noktayı ve varsa asimptotlarını bulunuz.

$T.K_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+1 > 0\} = (-\infty, \infty)$

$x=0 \Rightarrow y = \ln(1) = 0$; $y=0 \Rightarrow \ln(x^2+1)=0 \Rightarrow x=0$

Fonksiyon $(0,0)$'dan geçer.

$\lim_{x\to\mp\infty} \ln(x^2+1) = \infty$ Yatay Asimptot yok ; Düşey asimptot yok

Çünkü $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı.

(b) **(5 puan)** f fonksiyonunun kritik noktalarını, artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. Fonksiyon hangi noktalarda bir yerel maximuma yada minumuma sahiptir?

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ K.N. , $f(0)=0$

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

f fnk $(-\infty,0)$'da azalan
$(0,\infty)$'da artan

$x=0$ noktasında lokal min sahip

$f(0)=0$ Lok. min. değer.

(c) **(5 puan)** f fonksiyonunun konveks ($\cup$) ve konkav ($\cap$) olduğu aralıkları belirleyiniz ve büküm noktalarının absislerini bulunuz.

$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x.2x}{x^2+1} = \frac{2-2x^2}{x^2+1}$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\mp 1$

x		-1		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$

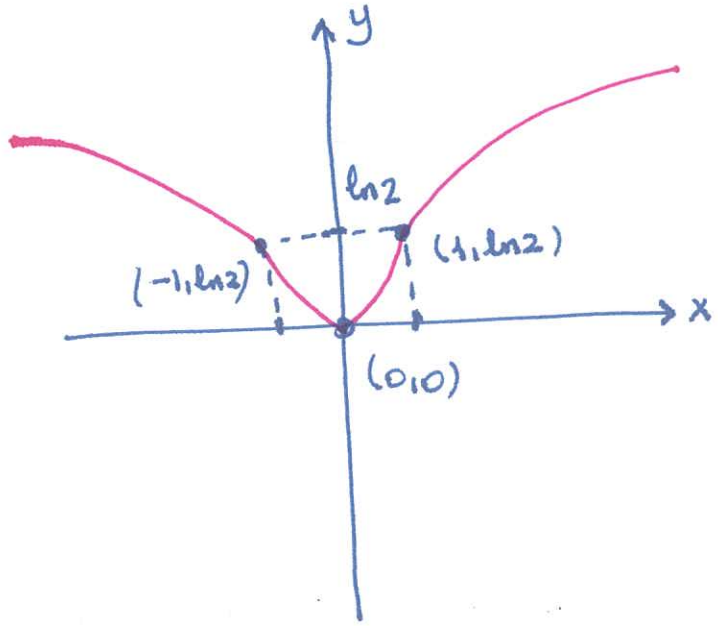
$f(-1) = \ln 2$, $f(1) = \ln(2)$

f fnk $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$'da konkav

$(-1,1)$'de konveks

(d) **(5 puan)** f fonksiyonun grafiğini çiziniz. $x=\mp 1$ Büküm nok. absisleri

X	$-\infty$		-1		0		$1.$		∞
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	∞
					L.min				



TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ 2015-2016 BAHAR DÖNEMİ
MAT-101 MATEMATİK I ARA SINAVI
29 ŞUBAT 2016

~ CEVAPLAR ~

Adı Soyadı: **Numara:** **İmza:**

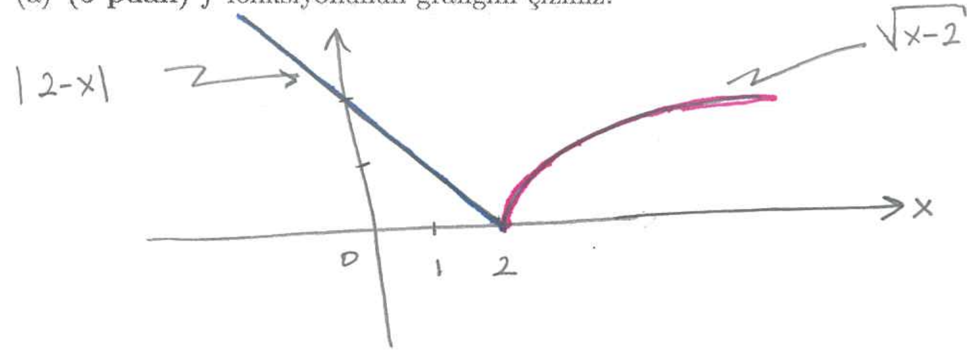
1. *(15 p.)*	**2.** *(20 p.)*	**3.** *(15 p.)*	**4.** *(15 p.)*	**5.** *(15 p.)*	**TOPLAM**

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar!

1.

$$f(x) = \begin{cases} |2-x| & ,x<2 \text{ ise} \\ \sqrt{x-2} & ,x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(a) **(5 puan)** f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



(b) **(5 puan)** f fonksiyonu $x=2$ noktasında sürekli midir? Cevabınızı nedenleri ile birlikte açıklayınız.

Grafikte kopma olmadığı için f fnk $x=2$'de süreklidir.

VEYA

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2^- \\ (x<2)}} |2-x| = 0$ ve $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2^+ \\ (x>2)}} \sqrt{x-2} = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2) = \sqrt{2-2}$. O halde, f fnk $x=2$'de sürekli.

(c) **(5 puan)** f fonksiyonu $x=2$ noktasında türevlenebilir mi? Türevlenebilir ise türevini bulunuz. Türevlenemez ise nedenini açıklayınız.

$x=2$'de sivri köşe olduğundan türevlenemez.

VEYA

$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2^- \\ (x<2)}} \frac{|2-x|-0}{x-2} = -1$

$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2^+ \\ (x>2)}} \frac{\sqrt{x-2}-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \infty$

O halde, $x=2$'de türevlenemez.

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) **(10 puan)** $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\cot(x-\pi) = [0\cdot\infty]$

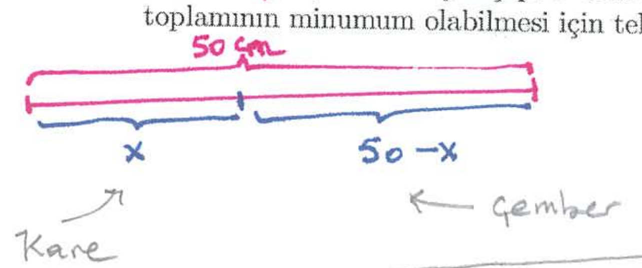
$$= \lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)}{\frac{1}{\cot(x-\pi)}} = \lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\tan(x-\pi)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{L'H.}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{1}{\sec^2(x-\pi)} = \frac{1}{1} = 1$$

(b) **(10 puan)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{101x}-3^{-x}}{3^{101x}+3^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3^{-x}}\,(3^{102x}-1)}{\cancel{3^{-x}}\,(3^{102x}+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3^{102x}\cdot\ln 3\cdot 102}{3^{102x}\cdot\ln 3\cdot 102} = 1.$$

3. (15 puan) Uzunluğu 50 cm olan bir tel iki parçaya kesilerek, birinci parçadan bir kare ve ikinci parçadan ise yarıçapı r olan bir çember yapılıyor. Bu iki şeklin alanları toplamının minumum olabilmesi için tel parcalarının uzunlukları ne olmalıdır?



$$2\pi r = 50 - x \qquad r = \frac{50-x}{2\pi}$$

$$\boxed{\text{Alan} = A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{50-x}{2\pi}\right)^2 \;;\quad 0\le x\le 50}$$

$$A'(x) = \frac{x}{8} + \frac{(50-x)(-1)}{2\pi}, \quad A'(x)=0 \Rightarrow 2\pi x + 8x - 400 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{200}{\pi+4}}$$

x	0		$\frac{200}{\pi+4}$	
$A'(x)$		$-$		$+$
		↘	L. min.	↗

$$A(0) = \frac{(50)^2}{4\pi}$$
$$A(50) = \frac{(50)^2}{16}$$
$$A\left(\frac{200}{\pi+4}\right) = \ldots$$

$A\left(\frac{200}{\pi+4}\right) < A(0) < A(50)$

mutlak min

$x = \frac{200}{\pi+4}$ (Kare için)

$50 - \frac{200}{\pi+4} = \frac{50\pi}{\pi+4}$ (Çember için)

4. (a) **(5 puan)**

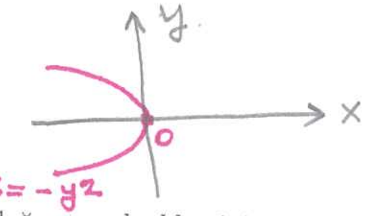
$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t - 1 \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

parametrik denklemleri ile verilen eğriyi kartezyen koordinat düzleminde çiziniz.

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Longrightarrow \cos^2 t - 1 = -\sin^2 t$

Öyleyse, $x(t) = -\sin^2 t = -y^2(t)$

yani $\boxed{x = -y^2}$



(b) **(10 puan)** $t=\frac{\pi}{4}$ iken elde edilen noktada eğriye teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{2\cos t\,(-\sin t)} = \frac{-1}{2\sin t} \Rightarrow m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \frac{-1}{\sqrt2} = -\frac{\sqrt2}{2}$$

$t=\frac{\pi}{4}$ iken $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, $y(\pi/4) = \sqrt2/2$.

Teğet Denk: $y - \frac{\sqrt2}{2} = -\frac{\sqrt2}{2}\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt2}{4} - \frac{\sqrt2}{2}x}$

5. Aşağıdaki fonksiyonların $x=0$ noktasındaki türevini hesaplayınız, yani $g'(0)$ değerini hesaplayınız.

(a) **(8 puan)** $g(x) = \underbrace{(\cos x)^{\ln(e+2x)}}_{y_1} + \underbrace{Arc\tan(2^x)}_{y_2}$

$$y_2' = \frac{2^x\cdot\ln 2}{1+(2^x)^2}$$

$$y_1 = (\cos x)^{\ln(e+2x)} \Rightarrow \ln y_1 = \ln(e+2x)\cdot\ln(\cos x)$$

$$y_1' = y_1\left[\frac{2}{e+2x}\cdot\ln(\cos x) + \frac{-\sin x}{\cos x}\cdot\ln(e+2x)\right]$$

$$y_1' = (\cos x)^{\ln(e+2x)}\left[\frac{2\cdot\ln(\cos x)}{e+2x} + \frac{(-\sin x)\ln(e+2x)}{\cos x}\right]$$

$$g'(0) = y_1'(0) + y_2'(0) = \frac{\ln 2}{2} + 1^1[0+0] = \frac{\ln 2}{2}$$

(b) **(7 puan)**

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}.$$

$$g'(0) = \lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{\frac{1-\cos x}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$