TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2014-2015 BAHAR DÖNEMİ

MAT-102 MATEMATİK II - BÜTÜNLEME SINAVI

28 Nisan 2015

Adı Soyadı:

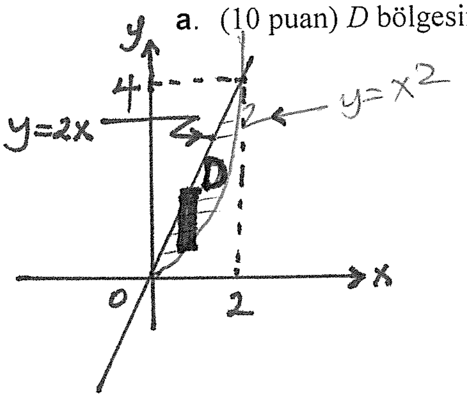
Numarası: CEVAP ANAHTARI

NOT: Sınav süresi 110 dakikadır.

1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	5. Soru	6. Soru	TOPLAM

1. $y = 2x$ doğrusu ve $y = x^2$ parabolü ile sınırlanan bölgeyi D ile gösterelim.

a. (10 puan) D bölgesini çiziniz ve alanını hesaplayınız.



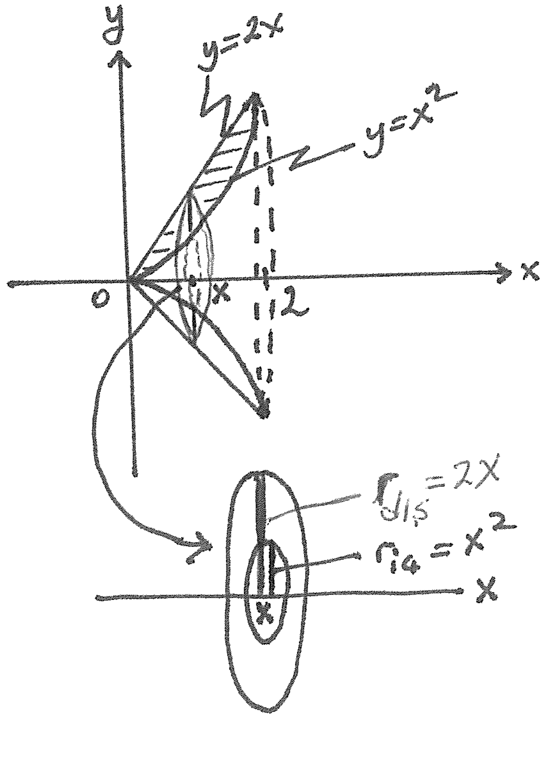
$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2 \ , \ x^2 \le y \le 2x\}$$

$$\text{Alan} = \int_{x=0}^{2} (2x - x^2)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 4 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \text{ br}^2.$$

b. (15 puan) D bölgesinin $x-$*ekseni* etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini hesaplayınız.



$$\text{Hacim} = \int_{x=0}^{2} \left(\pi (r_{dış})^2 - \pi (r_{iç})^2\right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} (\pi 4x^2 - \pi x^4)\,dx$$

$$= \pi \left(4\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right)$$

$$= \frac{64\pi}{15} \text{ br}^3$$

2. (10 puan) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{n^2}$ serisinin yakınsaklığını/ıraksaklığını belirleyiniz? Yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$a_n = \frac{(n-1)(n+2)}{n^2} = \frac{n^2+n-2}{n^2}$$ serinin genel terimidir.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-2}{n^2} = 1 \neq 0$$

olduğundan verilen seri IRAKSAKTIR.

3. (15 puan) $h(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ foksiyonunun $P(1,1,0)$ noktasında ve $\vec{v} = 2i - 3j + 6k$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz.

$V = \langle 2,-3,6 \rangle$, $|V| = \sqrt{4+9+36} = 7$

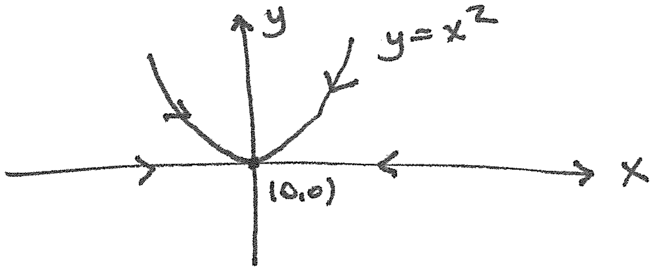
$u = \langle \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7} \rangle$ ve $|u| = 1$ 'dir.

$\nabla h = \langle 3x^2 - y^2 , -2xy , -1 \rangle$

$\nabla h \big|_P = \langle 2, -2, -1 \rangle$

$D_u h \big|_P = \nabla h \big|_P \cdot u = \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$

4. (10 puan) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{15x^2y}{2x^4+3y^2} = ?$



x-ekseni üzerinden (0,0)'a yaklaşılırsa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{15x^2y}{2x^4+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x^4} = 0 = L_1$$

$y=x^2$ eğrisi üzerinden (0,0)'a yaklaşılırsa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{15x^2y}{2x^4+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{15x^2 \cdot x^2}{2x^4+3(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{15x^4}{5x^4} = 3 = L_2$$

$L_1 \neq L_2$ olduğundan limit mevcut değildir.

5. (20 puan) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

$f_x = 3x^2 + 3y$ $\quad$ $f_x = 0 \Rightarrow y = -x^2$

$f_y = 3x + 3y^2$ $\quad$ $f_y = 0 \Rightarrow 3x + 3(-x^2)^2 = 0$

$f_{xx} = 6x$ $\quad$ $3x(1+x^3) = 0$

$f_{xy} = 3 = f_{yx}$ $\quad$ ya $x=0$ yada $x=-1$

$f_{yy} = 6y$ $\quad$ $x=0 \Rightarrow y=0$

$x=-1 \Rightarrow y=-1$

(0,0) ve (−1,−1) KRİTİK NOKTALAR

(0,0)'da: $D(0,0) = f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0) \cdot f_{yx}(0,0)$

$= 0.0 - 3.3 = -9 < 0$

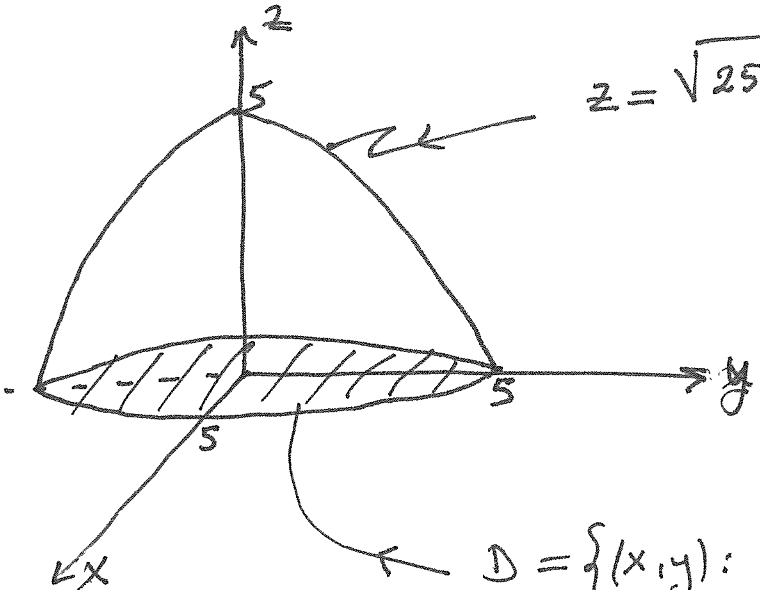
(0,0) bir SEMER noktası

(−1,−1)'de: $D(-1,-1) = -6 \cdot -6 - 3.3 = 27 > 0$

$f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$

(−1,−1)'de lokal maks. var ve $f(-1,-1) = -1+3-1 = 1$ L. maks. değer

6. (20 puan) Yarıçapı 5 cm olan **yarım** kürenin hacmini **iki katlı integral** kullanarak hesaplayınız



$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} := f(x,y)$$

$$D = \{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le 5\} = \{(r,\theta) : \begin{array}{l} 0 \le r \le 5 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\}$$

$$\text{Hacim} = \iint_D f(x,y)\, dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{5} \sqrt{25 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{(25-r^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_{r=0}^{5} \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} -\frac{1}{3} \left(0 - (25)^{3/2} \right) d\theta = \frac{125}{3} \cdot \int_0^{2\pi} 1 . d\theta$$

$$= \frac{125}{3} (2\pi - 0) = \frac{250\pi}{3} \text{ br}^3$$

7