TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, BAHAR DÖNEMİ 2014-2015
MAT-102– MATEMATİK II - ARA SINAVI
18 Şubat 2015

Adı Soyadı ve imzası:

Numara ve Şubesi:

1. Prob	2. Prob	3. Prob	4. Prob	5. Prob	6. Prob	7. Prob	TOPLAM

NOT: Sınav süresi 110 dakikadır.

---

1. (a) (8 puan) Genel terimi $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ olan dizinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz? Yakınsak ise limitini bulunuz.

   Çözüm: $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu $x = 1, 2, 3, ..., n, ...$ için sürekli fonsiyon $f(n) = a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ olduğundan ve $f(x)$ fonksiyonu $x > 0$ için sürekli olduğundan:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

   O halde $\left\{\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ yakınsaktır ve limiti sıfırdır.

   (b) (3 puan) Sınırlı olan dizilere bir örnek veriniz.

   Çözüm: $a_n = (-1)^n$ veya $a_n = \frac{1}{n}$ veya $a_n = \frac{n}{n+1}$.

   (c) (3 puan) Monoton azalan dizilere bir örnek veriniz.

   Çözüm: $a_n = \frac{1}{n}$ veya $a_n = \frac{1}{n+5}$.

2. (15 puan) Aşağıdaki has olmayan integrali hesaplayınız

$$\int_0^{100} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx.$$

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ fonksiyonu $x = 0$ da dikey asimtota sahiptir.

$$\begin{aligned}
\int_0^{100} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx &= \lim_{c \to 0^+} \int_c^{100} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx \\
u &= 1+\sqrt{x}\ olsun. du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx\ olur. \\
&= \lim_{c \to 0^+} \int_{1+\sqrt{c}}^{11} \frac{2}{u} du \\
&= \lim_{c \to 0^+} \left[2\ln|u|\right]_{1+\sqrt{c}}^{11} \\
&= \lim_{c \to 0^+} 2\left[\ln 11 - \ln(1+\sqrt{c})\right] \\
&= 2\ln 11
\end{aligned}$$

3. (10 puan) 2 cm yarıçapındaki bir çemberin içerisine, merkezi aynı fakat yarıçapı bir önceki çemberin yarıçapının yarısı olan bir çember çiziliyor. Elde edilen çemberin içerisini de, yine merkezi aynı fakat yarıçapı son çizilen çemberin yarısı olan bir çember daha çiziliyor ve bu işlem sonsuz kez tekrarlanıyor. Çizilen çemberlerin yarıçapları toplamını bulunuz.

Çözüm: İlk çizilen çemberin yarıçapı $= 2$

İkinci çizilen çemberin yarıçapı$= 1$

Üçüncü çizilen çemberin yarıçapı$= \frac{1}{2}$

Dördüncü çizilen çemberin yarıçapı$= \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$

....

$$\begin{aligned}
Çemberlerin\ yarıcapları\ toplamı &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... \\
&= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} \\
&= 2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4
\end{aligned}$$

4. (13 puan) Aşağıdaki serinin mutlak veya şartlı yakınsak olup olmadığını belirleyiniz

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Çözüm: Verilen seri alterne seridir. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ dir.

i. Her $n \geq 1$ için $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ dır.

ii. Her $n \geq 1$ için $n+1 > n \Rightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow u_{n+1} < u_n$ dir. O halde u_n azalandır.

iii. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

olduğundan Alterne Seri teoreminden $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ serisi yakınsaktır.

Mutlak yakınsaklığını inceleyelim: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ olur.

Her $n > 1$ için $n^2 > n+1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri olduğundan ıraksaktır. O halde karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|$ serisi de ıraksaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ serisi mutlak yakınsak değildir. Seri şartlı yakınsaktır.

5. (13 puan) Aşağıdaki kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yalınsaklık yarıçapını bulunuz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)5^n}.$$

Çözüm: $a_n = \frac{(x+3)^n}{(n+1)5^n}$ denirse

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_1} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}} \frac{(n+1)5^n}{(x+3)^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+3)}{5} \frac{(n+1)}{(n+2)} \right| \\
&= \left| \frac{x+3}{5} \right| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)} \\
&= \left| \frac{x+3}{5} \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Oran testinden $\left|\frac{x+3}{5}\right| < 1 \Rightarrow |x+3| < 5 \Rightarrow -5 < x+3 < 5 \Rightarrow -8 < x < 2$ ise seri yakınsaktır.

Şimdi bulunan aralığın uç noktalarını inceleyelim:

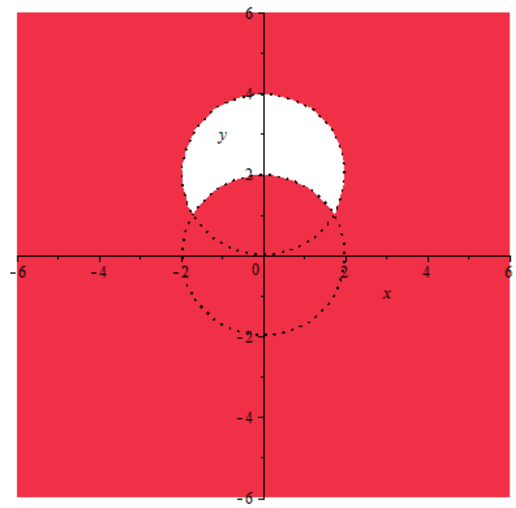
$x = -8$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(n+1)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ serisi alterne harmonik seri olduğundan yakınsaktır.

$x = -2$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5)^n}{(n+1)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$ harmonik seri olduğundan ıraksaktır.

O halde serinin yakınsaklı aralığı $-8 \leq x < 2$ ve yakınsaklık yarıçapı 5 tir.

6. (15 puan) $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin dışında ve $r = 4\sin\theta$ çemberinin içinde kalan bölgeyi çiziniz ve bu bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



$x^2 + y^2 = 4$ denklemini kutupsal koordinatlarda yazalım. $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ olduğundan $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 x + \sin^2 x) = r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$ bulunur.

Şimdi iki çemberin kesiştiği θ değerlerini bulalım.

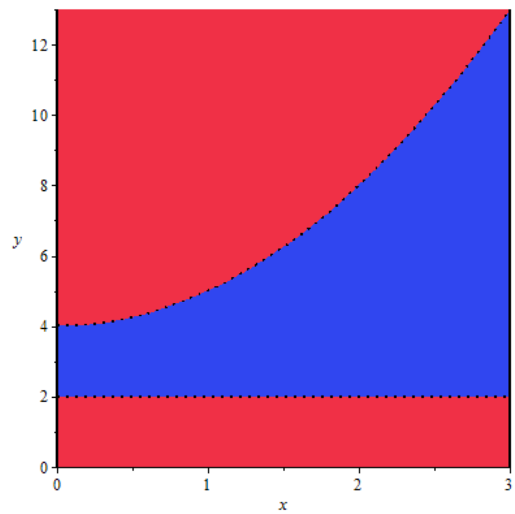
$$r = 4\sin\theta \text{ ve } r = 2 \Rightarrow 2 = \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ve } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

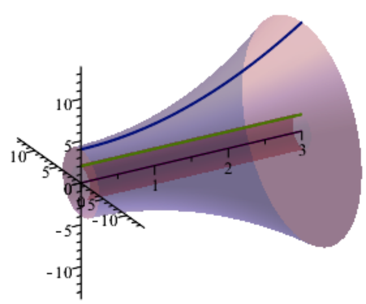
bulunur.

$$\begin{aligned}
Alan &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\frac{1}{2}(4\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}2^2)d\theta \\
&= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\frac{1}{2}(4\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}2^2)d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (16\sin^2\theta - 4)d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (16\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 4)d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (4 - 8\cos 2\theta)d\theta = [4\theta - 4\sin 2\theta]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{8}{6}\pi + 2\sqrt{3}br^2
\end{aligned}$$

7. S bölgesi, $y = x^2 + 4$ eğrisi ile $y = 2$, $x = 0$ ve $x = 3$ doğruları tarafından sınırlı bir bölge olsun. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

(a) (10 puan) S bölgesinin $x - ekseni$ etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel (katı) cismin hacmini bir integral olarak ifade ediniz. **(İntegrali hesaplamayınız!)**

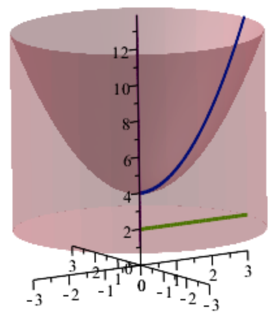




The solid of revolution created on $0 \le x \le 3$ by rotation of $f(x) = x^2 + 4$ and $g(x) = 2$ about the axis $y = 0$.

$$Hacim = \int_0^3 (\pi(x^2+4)^2 - \pi 2^2)dx$$

(b) (10 puan) S bölgesinin $y-ekseni$ etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel (katı) cismin hacmini bir integral olarak ifade ediniz. **(İntegrali hesaplamayınız!)**



The solid of revolution created on $0 \le x \le 3$ by rotation of $f(x) = x^2 + 4$ and $g(x) = 2$ about the axis $x = 0$.

$$
\begin{aligned}
Hacim &= \int_0^3 2\pi x((x^2+4)-2)dx \\
&= 2\pi \int_0^3 x(x^2+2)dx
\end{aligned}
$$