5. UYGULAMA

Hatırlatmalar

(*) (Diziler için Cauchy Kriteri) $f_k : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o.ü (f_k) ve $\varepsilon > 0$ verilsin

(f_k) düzgün yakınsaktır $\iff$ $k \geq p > k_0$ için Sde $|f_k(x) - f_p(x)| < \varepsilon$

o.ş $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

(*) (Seriler için Cauchy Kriteri) $f_k : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o.ü $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi v

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ nın düzgün yakınsak olması için gerek ve

yeter şart $k > p \geq k_0$ için A da

$$|S_k(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^{k} f_n(x) \right| < \varepsilon \quad \text{o.ş} \quad k_0 \in \mathbb{N} \text{ olmasıdır.}$$

(*) (Weierstrass M-kriteri) $f_k : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o.ü $\forall x \in A$ için

$|f_k(x)| \leq M_k$ o.ş M_k reel sayıları mevcut ve $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ yakınsa

ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi düzgün ve mutlak yakınsaktır.

(*) $f_k : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve S'de $f_k \rightrightarrows f$ ise f S'de sürekli

$$\lim_{k \to \infty} \left[\lim_{x \to x_0} f_k(x) \right] = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{k \to \infty} f_k(x) \right] = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right] = f(x_0)$$

(*) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k \in C[a,b]$ ve $[a,b]$'de $f_k \rightrightarrows f$ ise $f \in C[a,b]$ v

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \lim_{k \to \infty} f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

① $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ serisinin $\forall x \in [0,1]$ için yakınsak fakat bu yakınsamanın düzgün olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

Serinin kısmi toplar dizisini oluşturalım:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} x(1-x)^n = x(1-x) + \cdots + x(1-x)^k$$

$$= x.(1-x)\left[1+(1-x)+\cdots+(1-x)^{k-1}\right]$$

$$= x.(1-x) \cdot \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = (1-x)\left[1-(1-x)^k\right]$$

$\forall x \in [0,1)$ için bakalım:

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = S(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ 1-x & , 0<x\leq 1 \end{cases}$$

Öyleyse $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n = S(x)$ olur. Yani seri yukarıda tanımlanan $S(x)$ fonk.'a yakınsaktır. Ancak $f_k(x) = x(1-x)^k$ fonk. her biri sürekli olup $S(x)$ fonk sürekli olmadığından bu yakınsama düzgün yakınsak olamaz.

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ serisinin $I=[1,2]$ için yakınsak olduğunu gösteriniz. Bu yakınsama düzgün müdür?

Çözüm:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{x}{(1+x)^n} = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \dots + \frac{x}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{1+x}\left[\frac{1-\frac{1}{(1+x)^k}}{1-\frac{1}{1+x}}\right] = 1 - \frac{1}{(1+x)^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{(1+x)^k} \underset{x\in[1,2]}{\downarrow}= 1 = S(x) \quad \text{olur!}$$

Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = S(x) = 1$ dir. Şimdi de serinin düzgün yakınsak olup olmadığına bakalım. Biliyoruz ki serinin düzgün yakınsaklığı kısmi toplamlar dizisininkine denktir.

Öyleyse:

$$C_k = \sup_{x\in[1,2]} \left| S_k(x) - S(x) \right| = \sup_{x\in[1,2]} \left| -\frac{1}{(1+x)^k} \right| = \frac{1}{2^k}$$

$\lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$ old. dan kısmi toplamlar dizisi düzgün yak. ve dolayısıyla fonk. serisi düzgün yakınsaktır.

(3) a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$, $0 \le x < \infty$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)x^n$, $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

belirtilen aralıklarda verilen fonk. serilerinin düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz

Çözüm:

a) $\left|\dfrac{1}{k^2+x^2}\right| \leq \underbrace{\dfrac{1}{k^2}}_{M_k}$ olup $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ serise $p=2>1$ old. p testi gereğince yakınsaktır..

Öyleyse $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+x^2}$ serisi düzgün yakınsaktır.

b) $\forall x \in I=\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için $|(n+1)x^n| = n+1\,|x|^n \leq \underbrace{\dfrac{n+1}{2^n}}_{M_n}$

olup $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n}$ yakınsak old.dan $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n+1} = \dfrac{1}{2} < 1\right)$ oran testi.

Verilen seri düzgün yakınsaktır.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}\, dx = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$ diyelim. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^{nx^2} \cdot n^2} = 0$ (!)

olup noktasal yakınsaktır.

$c_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ olur ve $f_n \rightrightarrows f$ tir. Öyleyse

integral ile limit yer değiştirebilir.

$\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}\, dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^{nx^2} n^2} = \int_0^1 0\, dx = 0$ olur.

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ yakınsak ise $\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}$ dır.

Gösteriniz.

Çözüm:

Hatırlayalım ki, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ yakınsak ise $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$ dır.

$f_k(x) = a_k x^k$ olarak tanımlayalım. O halde, $\forall x \in [0,1]$ için

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} a_k x^k = 0 = f(x)$$ olur. $f_k \to f$ noktasal yakınsar.

$$c_k = \sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |a_k x^k| = a_k$$

$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} a_k = 0$ old. dan $f_k \rightrightarrows f$ tir. Dolayısıyla

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 a_k x^k dx \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}.$$