#6. UYGULAMA

Taylor Polinomu:

$$P_m(\underbrace{x_0, y_0}_{P_0}; x, y) = f(P_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x} f(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(P_0)(y-y_0)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(p_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(p_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(p_0)(y-y_0)^2\right]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{1}{m!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(p_0)(x-x_0)^m + m\frac{\partial^m}{\partial x^{m-1}\partial y} f(p_0)(x-x_0)^{m-1}(y-y_0) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(p_0)(y-y_0)^m\right]$$

(*) $m=1$ olması halinde bu polinom bize teğet düzlem yaklaşımını vermektedir.

$$\boxed{P_m(x_0, y_0; x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0, y_0)}$$

Taylor polinomu

$\boxed{\text{Teorem}}$ $0 \le k \le m$ şartını sağlayan $\forall k$ için ve $\forall (x,y) \in N_\delta(x_0, y_0)$ için

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^{m-k}\partial y^k} f(x,y)\right| \le M \quad \text{o.ş} \quad M > 0 \text{ varsa}$$

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x_0, y_0; x; y) = 0 \text{ dır.}$$

$\boxed{\text{Teorem}}$ (Taylor Formülü)

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0,y_0)$$

$$\underbrace{+\frac{1}{(m+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{m+1} f(c_1,c_2)}_{K_m(x_0,y_0;\,x,y)}.$$

$\exists$ (c_1,c_2) ; (x_0,y_0) ile (x,y) noktaları arasında,

$\boxed{\text{Teorem}}$ (Ortalama değer Teo.)

$\forall (x,y) \in N_\delta(x_0,y_0)$ için

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x-x_0) f_x(c_1,c_2) + (y-y_0) f_y(c_1,c_2)$$

o.ş. (x_0,y_0) ile (x,y) arasında (c_1,c_2) noktası vardır.

(1) $f(x,y) = e^{x-2y}$ fonk için $P_3(0,0;x,y)$ taylor polinomunu bulunuz.

Çözüm :

$$P_3(0,0;x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)\,x + \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)\,y\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0)\,x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)\,x\cdot y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0,0)\,y^2\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(0,0)\,x^3 + \cdots + \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(0,0)\,y^3\right]$$

$$P_3(0,0;x,y) = 1 + x - 2y + \frac{x^2}{2} - 2xy + 2y^2 + \frac{x^3}{6} - x^2y + 2xy^2 - \frac{4y^3}{3}$$

② Taylor formülünü kullanarak $f(x,y) = \sin x \sin y$ için orjin civarında, bir kuadratik yaklaşım bulunuz. $|x| \leq 0.1$ ve $|y| \leq 0.1$ old. bu yaklaşımdaki hata için ne söylenebilir.

Çözüm

$n=2$ için taylor formülü

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\ldots\right.$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{3!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(x_0,y_0)}_{\substack{\text{KALAN TERİM} \\ \text{(HATA)}}}$$

türevleri bulalım:

$f(0,0) = 0$ $\qquad f_{xx}(0,0) = 0$

$f_x(0,0) = 0$ $\qquad f_{xy}(0,0) = 1$

$f_y(0,0) = 0$ $\qquad f_{yy}(0,0) = 0$

$$f(x,y) = \sin x \sin y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot 0 + 2xy \cdot 1 + y^2 \cdot 0\right)$$

$$f(x,y) = \sin x . \sin y \approx xy \quad (n=2 \text{ için})$$

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{6}\left((0.1)^3 + 3.(0.1)^3 + 3.(0.1)^3 + (0.1)^3\right) \leq \frac{8}{600} \,//$$

türevlerdeki sin ve cos ifadeleri her zaman 1 den küçük.

③ $f(x,y) = e^{x+y}$ olarak tanımlansın $(0,0)$ daki taylor serisini ve bu serinin toplamını bulunuz.

Çözüm:

Önce türevleri bulalım. $\forall m,k$ için ($0 \le k \le m$ o.ü)

$$\frac{\partial^m}{\partial x^{m-k} \partial y^k} f(x,y) = e^{x+y}$$ olur. Öyleyse

$$\frac{\partial^m}{\partial x^{m-k} \partial y^k} f(0,0) = 1$$ dir. Böylece taylor serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0,y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k$$

olur. Fonk. bu seriye yakınsadığını söyleyebilmek için kalan terimin sıfıra gittiğini göstermeliyiz. Bunun için ise

$(x,y) \in N_\delta(0,0)$ için

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^{m-k} \partial y^k} f(x,y) \right| = \left| e^{x+y} \right| \le e^{2\delta} = M$$ olarak alalım.

Öyleyse teoremden

$$f(x,y) = e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$ olur.

DÜZGÜN YAKINSAKLIK SONUÇLARI

① $(f_k) \rightrightarrows f$ ve f_k sürekli ise f de süreklidir.

(Düzgün yakınsaklık sürekliliği taşır!)

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows f$ ve f_k sürekli ise f de süreklidir.

② $(f_k) \rightrightarrows f$ ise

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$ olur.

$\sum f_k \rightrightarrows f$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

③ $(f_k) \to f$ ve $(f_k') \rightrightarrows g$ olsun.

$$\left[\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right]' = \lim_{k\to\infty} f_k'(x)$$ olur. Yani $[f(x)]' = g(x)$

$\sum f_k \to f$ ve $\sum (f_k)' \rightrightarrows h$ ise

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$ olur.