UYGULAMA 1

① Aşağıda verilen fonksiyonlar için istenilen kısmi türevleri hesaplayınız.

a) $f(x,y) = \cos^2(3x-y^2)$ f_x ve f_y

b) $f(x,y) = \sin xy$ f_{xx}, f_{yx}

c) $w = xy\ln(yz)$ w_z, w_y, w_{zx}

Çözüm: a) $f_x = -2\cos(3x-y^2)\sin(3x-y^2) \cdot 3$

$f_y = -2\cos(3x-y^2)\sin(3x-y^2) \cdot (-2y)$

b) $f_x = (\cos xy)\cdot(y) \Rightarrow f_{xx} = -y^2\sin(xy)$

$f_y = (\cos xy)(x) \Rightarrow f_{yx} = \cos xy - x^2\sin(xy)$

c) $w_z = \dfrac{xy^2}{z}$ $\Big\}$ $w_{zx} = \dfrac{y^2}{z}$

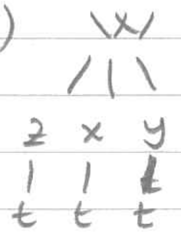
$w_y = x\ln(yz) + xz$

② Aşağıda verilen fonk. için zincir kuralını kullanarak istenilen kısmi türevleri bulunuz.

a) $w = z - \sin xy$ $x = t$ $y = \ln t$ $z = e^{t-1}$ $t = 1$

b) $z = 4e^x \ln y$ $x = \ln(u\cos v)$ $y = u\sin v$ $(u,v) = (2, \pi/4)$

Çözüm a)



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= 1 \cdot e^{t-1} - y\cos xy \cdot 1 - x\cos xy \cdot \frac{1}{t}$$

$t = 1 \Rightarrow x = 1, \; y = 0, \; z = 1$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=1} = 1 - 0 \ldots - 1 = \underline{\underline{0}}$$

3) Aşağıda verilen fonk için zincir kuralı diyagramını çiziniz.

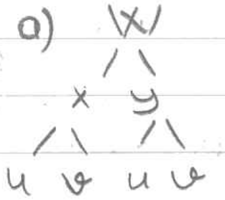
a) $w = g(x,y)$, $x = h(u,v)$, $y = k(u,v)$ $\quad \dfrac{\partial w}{\partial u}, \ \dfrac{\partial w}{\partial v} = ?$

b) $z = f(u,v,w)$, $u = h(x,y)$ $\quad v = k(x)$ $\quad w = g(x,y)$

$x = f_1(t,s)$ $\quad y = f_2(t)$

$\dfrac{\partial z}{\partial t}, \ \dfrac{\partial z}{\partial s} = ?$

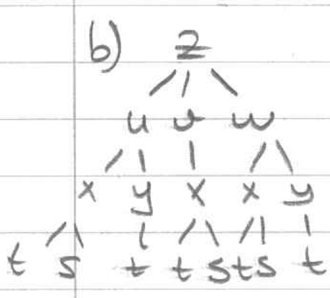
Çözüm: a)



$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

b)



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

4) Aşağıda verilen yüzeylerin istenilen noktalardaki teğet düzlem denklemlerini bulunuz.

a) $f(x,y) = x + xy + y^2$ $\quad (1,1,3)$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4$ $\quad (2,-3,18)$

$z = f(x,y)$ yüzeyine teğet olan düzlem:

$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) = z - z_0$$

Çözüm: a) $f_x = 1 + y \Rightarrow f_x(1,1) = 2$
$f_y = x + 2y \Rightarrow f_y(1,1) = 3$

$z = 3 + 2(x-1) + 3(y-1)$
$z = 2x + 3y - 2$

b) ödev!

(5) $\sqrt{(2.01)^2 + (1.98)^2 + (1.05)^2}$ nin yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm: $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$x_0 = 2 \quad y_0 = 2 \quad z_0 = 1$ ve $dx = 0.01 \quad dy = -0.02 \quad dz = 0.05$

$f_x(2,2,1) = \frac{2}{3}$

$f_y(2,2,1) = \frac{2}{3}$

$f_z(2,2,1) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(2.01, 1.98, 1.05)$
$\approx 3 + \frac{2}{3}(0.01) + \frac{2}{3}(-0.02) + \frac{1}{3}(0.05)$
$= 3.01$

(6) Verilen fonksiyonun istenilen noktadaki lineer yaklaşımını bulun.

$f(x,y) = e^x \cos y \qquad (0, \pi/2) \qquad (0,0)$

Çözüm:

$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$f_x(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow f_x(0, \pi/2) = 0$
$f_y(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow f_y(0, \pi/2) = -1$

$L(x,y) = -(y - \pi/2) = -y + \pi/2$ //

$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$df = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$

7) $f(x,y)=\begin{cases} 0 & xy\neq 0 \\ 1 & xy=0 \end{cases}$ ise $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$.. mevcut fakat f nin orjinde sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \neq 1 = f(0,0)$

dolayısıyla sürekli değildir.

i) $y=0$ olsun. $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$f(x,0)=1 \Rightarrow f_x(x,0)=0 \Rightarrow f_x(0,0)=0$

ii) $x=0$ olsun. $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$f(0,y)=1 \Rightarrow f_y(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0$

8) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(0,0) noktasında differensiyellenebilir midir?

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x=y}} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2} \neq f(0,0)$

sürekli değil $\Rightarrow$ dif.nemez

UYGULAMA 2

(1) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ ve $g(x,y) = x^2+2y^2-3$ fonk verilıyor. Buna göre f'in (1,1) noktasında $\vec{u} = \nabla g(3,2)$ vektörü yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm

$$D_u f(P_0) = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \nabla g(3,2) \Rightarrow \vec{u} = (2x, 4y)\Big|_{(3,2)} = (6,8)$$

$$\nabla f = \left(\frac{2x}{y}, x^2\right) \Rightarrow \nabla f\Big|_{(1,1)} = (2,1)$$

$$D_u f(1,1) = \nabla f_{(1,1)} \cdot \vec{u}$$

$$= (2,1) \cdot (6,8) = 20$$

(2) M(2,1,3) ve N(5,5,15) noktaları veriliyor. $f(x,y,z) = xy+yz+zx$ fonk.nun MN yönündeki türevini bulunuz

Çözüm $\overrightarrow{MN} = 3i+4j+12k = (3,4,12)$

$$\nabla f = (y+z, x+z, y+x)$$

$$D_u f(P_0) = 3(y+z) + 4(x+z) + 12(y+x) \quad !$$

NOT: Bir fonk türevinin maksimum old. yön ∇f yönüdür. Değer ise $\|\nabla f\|$ ile belirlenir.
→ Maksimum değişim oranı ise ∇f yönündeki $\underbrace{\text{değişim oranı}}_{\text{yönl türev!!}}$

③ Gradyen vektörünü kullanarak $z^2-x^2-y^2=4$ ün $(1,2,3)$ deki teğet düzlem denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$z = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0} + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$g(x,y,z)=0 \Rightarrow g(x,y,z) = z^2-x^2-y^2-4$$

$$\boxed{g(x,y,z) = f(x,y)-z}$$

$$\nabla g(x_0,y_0,z_0) \cdot (P-P_0) = 0$$

$$\nabla g = (-2x,-2y,2z) \Rightarrow \nabla g\big|_{(1,2,3)} = (-2,-4,6)$$

$$(-2,-4,6)(x-1,y-2,z-3)=0$$

$$-2x+2-4y+8+6z-18=0$$

$$\boxed{-x-2y+3z=4}$$ ✓ → normali gradyen vektörüne paralel

4) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ fonk. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ de geçen seviye eğrisini bulup çiziniz.

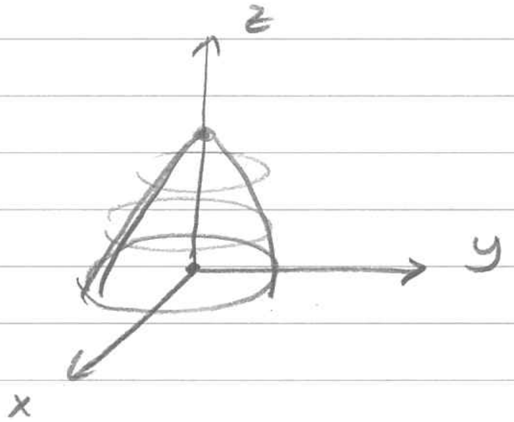
Çözüm: $f(x,y) = c = 4 - x^2 - y^2$

$c = 4 - 2 - 2 \Rightarrow \boxed{c = 0}$

$x^2 + y^2 = 4 - \cancel{k} \Rightarrow$ $k = 0$ $x^2 + y^2 = 4$

$k = 1$ $x^2 + y^2 = 3$

⋮



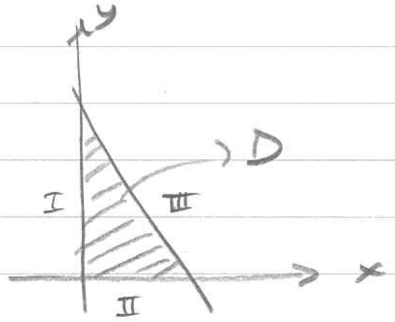
#3. UYGULAMA

(1) Aşağıdaki fonk. belirtilen kompakt bölgeler üzerinde kritik noktalarını ve bu noktaların çeşitlerini belirtiniz.

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$$

$$D = \{(x,y) : x \geq 0 \quad y \geq 0 \text{ ve } x+y \leq 4\}$$

Çözüm:



$$f_x = xy(2-x)e^{-x-y} = 0 \iff x = y = 0 \text{ veya } x = 2$$

$$f_y = x^2(1-y)e^{-x-y} = 0 \iff x = 0 \text{ veya } y = 1$$

$$K.N \Rightarrow (0,y) \quad y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ve} \quad (2,1) \Rightarrow f(2,1) = 0.1$$

III) $y = 4-x$, $x \in [0,4]$

$$\underset{\substack{\parallel \\ g(x)}}{f(x, 4-x)} = x^2(4-x)e^{-4}, \quad x \in [0,4)$$

$g(x)$ diyelim

$$g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = \frac{8}{3} \text{ K.N}$$

$g(0) = f(0,4) = 0 \qquad 0$

$g\left(\frac{8}{3}\right) = f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = 0.171$

max $f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{e^3}$

min 0

I ve II) $f = 0$

② As. fonk. kritik noktalarını bulup çeşitlerini belirtiniz.

a) $x^2-2x+y^2-4y+5=f(x,y)$

b) $f(x,y)=\cos x\, e^{\cos y}$

ÇÖZÜM a) $f_x(x,y)=2x-2=0 \Rightarrow x=1$

$f_y(x,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$

$\Big\} (1,2)$ K.N

$D=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$

• $f_{xx}=2$ • $f_{xy}=0$

• $f_{yy}=2$

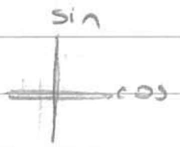
$D|_{(a,b)}=4>0$

$f_{xx}|_{(a,b)}=2>0$

$\Big\}$ lokal min!

b) $f_x(x,y)=-e^{\cos y}\sin x$

$f_y(x,y)=-\cos x\, e^{\cos y}.\sin y$



$f_x(x,y)=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$f_y(x,y)=0 \Rightarrow \cos x=0$ veya $\sin y=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}r,\ r\in\mathbb{Z}$ veya $y=\pi m\ m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ K.N $(\pi k,\pi m)$ $k,m\in\mathbb{Z}$

$f_{xx}(x,y)=-e^{\cos y}\cos x$

$f_{yy}(x,y)=-\cos x\, e^{\cos y}.\sin^2 y-\cos x\, e^{\cos y}\cos y$

$f_{xy}(x,y)=+\sin x\, e^{\cos y}.\sin y$

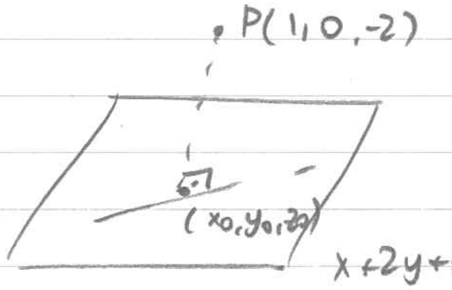
$D=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$

$D|_{(\pi k,\pi m)}=f_{xx}|_{(\pi k,\pi m)}\ f_y|_{(\pi k,\pi m)}-\left[f_{xy}|_{(\pi k,\pi m)}\right]^2$

$=0.$ –

③ $P(1,0,-2)$ noktasının $x+2y+z=4$ düzlemine en kısa uzaklığını bulunuz.

ÇÖZÜM:



$\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2+(z_0+2)^2}=$

$f(x,y,z)=(x_0-1)^2+y_0^2+(z_0+2)^2 \rightarrow$ min yapmalıyız.
Ancak düzlemi de sağlamalı.

$\Rightarrow \underbrace{x_0+2y_0+z_0-4=0}_{f(x,}\Rightarrow g(x,y,z):=x_0+2y_0+z_0-4$

$f_x=\lambda g_x \Rightarrow 2(x_0-1)=\lambda \Rightarrow x_0=\frac{\lambda+2}{2}$

$f_y=\lambda g_y \Rightarrow 2y_0=2\lambda \Rightarrow y_0=\lambda$

$f_z=\lambda g_z \Rightarrow 2(z_0+2)=\lambda \Rightarrow z_0=\frac{\lambda-4}{2}$

$g=0 \quad x_0+2y_0+z_0=4$

$\Rightarrow \frac{\lambda+2}{2}+2\lambda+\frac{\lambda}{2}-2=4 \Rightarrow 3\lambda=3$
$\lambda=1$

$x_0=\frac{3}{2} \quad y_0=1 \quad z_0=\frac{-3}{2}$ ✓

UYGULAMA 4

Hatırlatma :

(*) $f_k : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o.ü (f_k) fonksiyon dizisi verilmiş olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $k > k_0$ ve $\forall x \in S$ için

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$ olacak şekilde $k_0 = k_0(x; \varepsilon) > 0$

sayısı var ise (f_k) dizisi f ye yakınsaktır denir. (Noktasal)

(*) Bazı fonksiyon dizileri için buradaki k_0 sadece ε'a bağlı olarak bulunabilir. Yani x'e bağlı değildir. Böyle dizilere düzgün yakınsak denir.

(1) Verilen fonksiyon dizileri için $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ limitlerini bulunuz.

a) $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = (\cos x)^{2k}$

b) $f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \dfrac{kx}{1+kx}$

Çözüm :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ olur.

- $x = k\pi$, $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\cos^2 x = \cos^2 k\pi = 1$ olur.

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 1$ dir.

- $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $0 \leq \cos^2 x < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ olur.

Yani $$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 , & x \neq k\pi , k \in \mathbb{R} \\ 1 , & x = k\pi , k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b). $x=0 \Rightarrow f_k(x)=f_k(0)=0$ olur.

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=0$ dır

$x\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{kx}{1+kx}=1$ dır.

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=\begin{cases} 0 & , x=0 \\ 1 & , x\neq 0 \end{cases}$$ olur.

2) $f_k:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_k(x)=\dfrac{x^k}{1+x^k}$ ise $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm:

İlk olarak $f_k(0)=0$ olup $x=0$ için $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=0$ dır.

. $x\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x^k}{x^k\left(1+\frac{1}{x^k}\right)}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^k}}$ inceleyeceğiz

Sonuç olarak

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=\begin{cases} 0 & , 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & , x=1 \\ 1 & , x>1 \end{cases}$$

③ $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \begin{cases} kx, & x \in [0, \frac{1}{k}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$

olarak verilsin. $f_k(x)$'in noktasal yakınsadığı fonk. nedir?

ÇÖZÜM:

- $x = 0 \Rightarrow f_k(0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f_k(0) = f(0) = 0.$

- $x = 1 \Rightarrow f_k(1) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f_k(1) = f(1) = 1$

- $x \in (0,1) \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)}_{\text{yeterince büyük}} = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1 = f(x)$ olur.

yeterince büyük
k'lar için bir yerden
sonra $x \in [\frac{1}{k}, 1)$
olacaktır!

Öyleyse $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$

④ $x \in \mathbb{R}$ için $f_k(x) = \dfrac{\sin(kx+k)}{k}$ ise $f_k(x) \to f(x)$ noktasal limitini (tanımdan) bulunuz. Bu yakınsama düzgün müdür?

ÇÖZÜM:

$\forall y \in \mathbb{R}$ için $|\sin y| \leq 1$ dir. $\forall \varepsilon > 0$ ve $k > k_0 = k_0(x; \varepsilon)$ için

$$|f_k(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin(kx+k)}{k} - 0 \right| = \left| \frac{\sin(\overbrace{kx+k}^{y})}{k} \right| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$$

olması için $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ olarak seçilebilir. Bu seçim x'den

bağımsız old. dan düzgün yakınsaktır.

5) $f_k(x) = \dfrac{x}{1+kx^2}$, $x \in \mathbb{R}$ ise $f_k \rightrightarrows f$ old. gösteriniz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x}{1+kx^2} = 0 & (x \neq 0) \\ \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0 & (x = 0) \end{array}\right\} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = 0$$

$$c_k = \sup\{ |f_k(x) - 0| \; ; \; x \in \mathbb{R} \} = \sup\left\{ \left| \frac{x}{1+kx^2} \right| : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f_k(x) = \frac{x}{1+kx^2} \Rightarrow f_k'(x) = \frac{1+kx^2 - 2kx^2}{1+kx^2} = 0 \Rightarrow -kx^2 = -1$$

$$\Rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \underset{max}{x = \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

$$c_k = \sup\left\{ \left| \frac{x}{1+kx^2} \right| : x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$$ olup

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}} = 0 \underset{\text{teoremden}}{\Rightarrow} f_k \rightrightarrows f \text{ olur.}$$